



HAL
open science

Mathématiques appliquées pour le traitement du signal

Julien Lesouple

► **To cite this version:**

Julien Lesouple. Mathématiques appliquées pour le traitement du signal. Licence. France. 2024.
hal-04794786

HAL Id: hal-04794786

<https://enac.hal.science/hal-04794786v1>

Submitted on 21 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mathématiques Appliquées - Traitement du Signal

ISESA24

Julien Lesouple (TELECOM/SIGNAV)

julien.lesouple@enac.fr



Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Plan

① Introduction

Organisation

Contexte

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Plan

① Introduction

Organisation

Contexte

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Organisation du cours

- 5 séances de cours de 2h
 - signaux déterministes
 - signaux aléatoires
 - signaux échantillonnés
- 3 séances de TD de 2h
 - principes de base
 - signaux déterministes
 - signaux aléatoires
- 1 BE de 4h en autonomie (1/3 de l'évaluation)
- 1 examen en commun avec la partie de Gilles Thomine
 - examen de 2 heures, sans document, avec une des 3 calculatrices suivantes (TI30XB, TI36X PRO, Casio FX-92)
 - 3 parties de difficultés croissantes
 - questions de cours
 - exercices tirés d'une banque d'exercices (TD)
 - exercices original

Plan

① Introduction

Organisation

Contexte

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Contexte

Signal ?

Fonction évoluant dans le temps ou dans l'espace et qui contient une information

- messages dans le système nerveux
- courant mesuré par un thermomètre électrique
- système de communication

Traitement du signal ?

Retrouver l'information utile dans le signal

- décoder l'information nerveuse
- donner la valeur de la température
- envoyer/recevoir des messages

Plan

① Introduction

② Généralités

Différents types de signaux

Espaces Fonctionnels

Transformations des signaux

Produit de Convolution

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Plan

① Introduction

② Généralités

Différents types de signaux

Espaces Fonctionnels

Transformations des signaux

Produit de Convolution

③ Signaux Déterministes

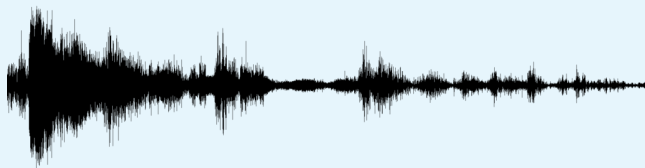
④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Signaux continus et signaux discrets

Signal continu : exemple

Onde acoustique : évolue en fonction du temps et de l'espace continus



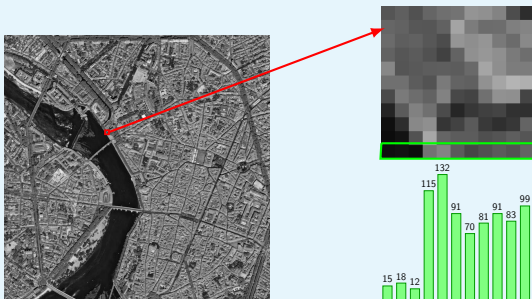
Dépend de la position de la source, de celle du récepteur, et du temps

- point de vue récepteur : variation seulement temporelle

Signaux continus et signaux discrets

Signal discret : exemple

Contraste des pixels d'un écran : évolue en fonction du temps continu et de l'espace discret



Aligner tous les pixels : variation unidimensionnelle \leftrightarrow temps

Exercice : signal continu ou discret ?

1D

- indice de la bourse en fin de journée
- chanson sur un disque vinyle
- chanson sur un CD

2D

- image dans un télescope
- image sur un écran plat
- photo sur une pellicule

3D

- le monde tel qu'on le voit
- un film sur une cassette VHS
- un film sur un DVD

Définition générale

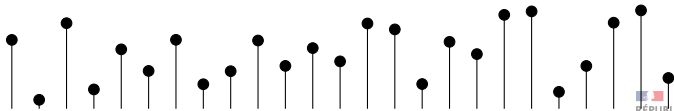
Signal

En général (et dans ce cours), un signal peut s'exprimer comme une fonction du temps

- signal continu $x(t)$: temps continu $\leftrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{x | \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{C}\}$



- signal discret $x[n]$: temps discret $\leftrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{x | \forall n \in \mathbb{N}, x[n] \in \mathbb{C}\}$



N.B : signal 2D : $s(x, y)$ ou $s[m, n]$

Signal analogique ou numérique

Sens physique : comment le signal contient l'information

Définition

Un signal x peut être

- **analogique** si x peut prendre un ensemble continu de valeurs
- **numérique** si x peut prendre un ensemble discret de valeurs

Exemples :

- thermomètre mercure : la hauteur du mercure varie continuellement
- thermomètre électronique : affiche un ensemble fini de valeurs (pex, un chiffre après la virgule)

Exercice : signal analogique ou numérique ?

1D

- indice de la bourse en fin de journée
- chanson sur un disque vinyle
- chanson sur un CD

2D

- image dans un télescope
- image sur un écran plat
- photo sur une pellicule

3D

- le monde tel qu'on le voit
- un film sur une cassette VHS
- un film sur un DVD

Signal causal ou non-causal

Sens physique : origine des temps à la réception du signal

Définition

Un signal $x(t)$ peut être

- **causal** si $x(t) = 0$ pour $t < 0$
- **non-causal** si il existe $t < 0$ tel que $x(t) \neq 0$

Idem pour un signal discret avec $x[n]$

Signal périodique

Signal périodique

Un signal $x(t)$ est périodique de période T_0 s'il vérifie

$$x(t) = x(t + nT_0)$$

pour tout entier n et réel t

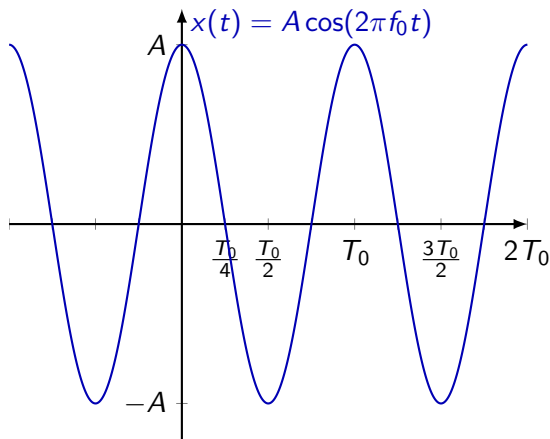
On définit également

- sa fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- sa pulsation fondamentale $\omega_0 = 2\pi f_0$

S'il n'est pas périodique, on dit que le signal est apériodique

N.B. signal discret $x[n] = x[n + mN_0] \quad \forall n, \forall m \in \mathbb{Z}$

Signaux périodiques



Remarque : période

Si x est T_0 -périodique, alors

$$x(t + 2T_0) = x(t + T_0 + T_0) = x(t + T_0) = x(t)$$

x est aussi $2T_0$ périodique (de même $3T_0, 4T_0, \dots$)

Période d'un signal

La période d'un signal est la plus petite durée à partir de laquelle celui-ci se répète

Signal aléatoire ou déterministe

Événement déterministe : une seule réalisation statistique

- la fonction $t \mapsto \cos(t)$

Événement aléatoire : plusieurs réalisations possibles avec différentes probabilités

- lancé de dé
- mesure d'une température à l'aide d'un capteur (présence de bruit de mesure)

Fonctionnement général

En théorie

- le traitement du signal peut-être appliqué à n'importe quel type de signal

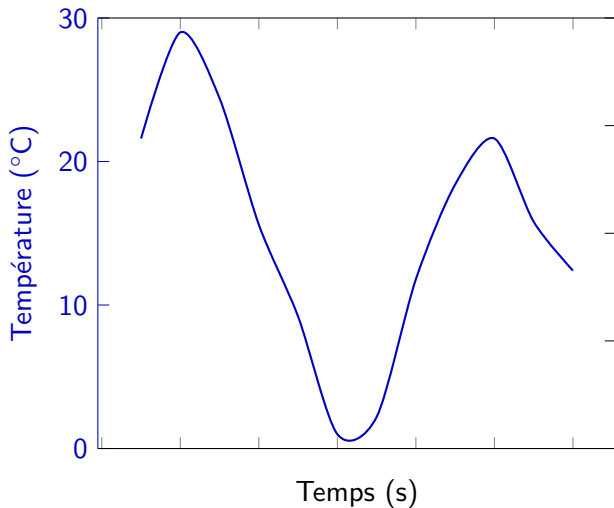
En pratique (en général)

- 1 on capte un signal analogique continu
- 2 on le discrétise en temps (échantillonnage) → signal discret
- 3 on discrétise ses valeurs (quantification) → signal numérique
- 4 on code les valeurs discrètes en séries de bits d'information (codage)

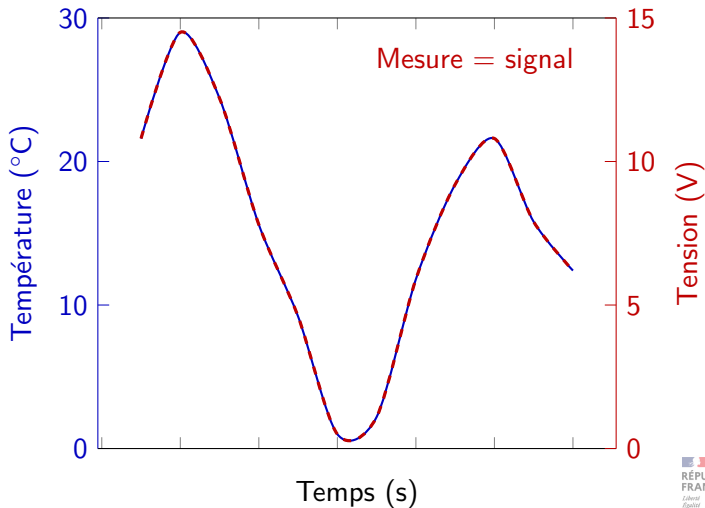
Perte de résolution en temps et valeurs, intérêt ?

- utilisation de traitement du signal numérique (DSP), plus rapide et plus robuste

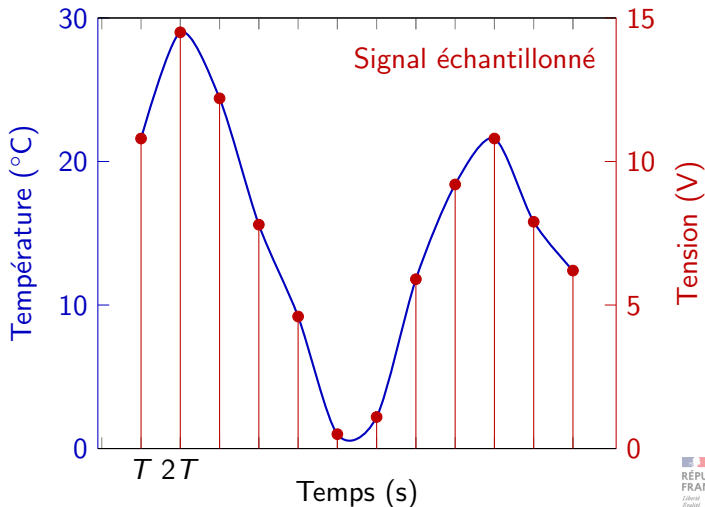
Exemple



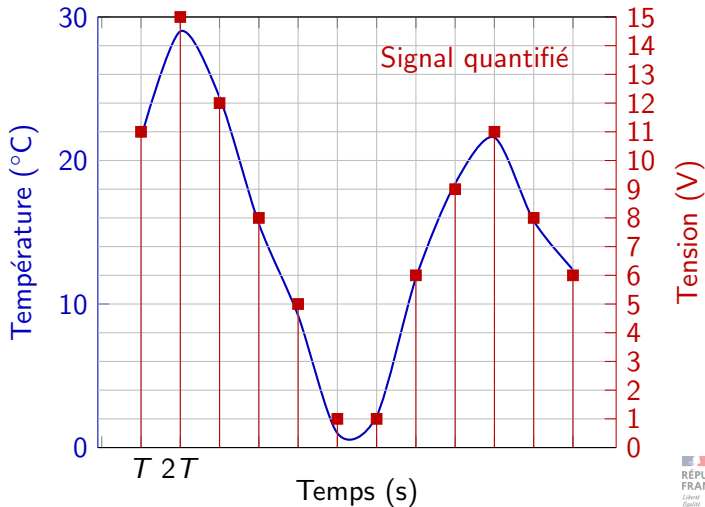
Exemple



Exemple



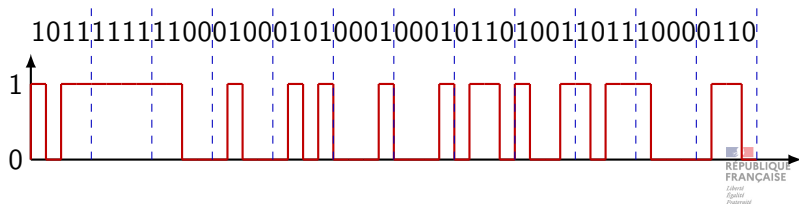
Exemple



Exemple

Signal numérique : conversion binaire

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 11 & x_7 = 1 \\
 x_2 = 15 & x_8 = 6 \\
 x_3 = 12 & x_9 = 9 \\
 x_4 = 8 & x_{10} = 11 \\
 x_5 = 5 & x_{11} = 8 \\
 x_6 = 1 & x_{12} = 6
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{ll}
 x_1 = 1011 & x_7 = 0001 \\
 x_2 = 1111 & x_8 = 0110 \\
 x_3 = 1100 & x_9 = 1001 \\
 x_4 = 0100 & x_{10} = 1011 \\
 x_5 = 0101 & x_{11} = 1000 \\
 x_6 = 0001 & x_{12} = 0110
 \end{array}$$



Dans ce cours

Signaux

- déterministes et aléatoires
- périodiques et apériodiques
- pas de prise en compte de la causalité ou non

Traitement du signal pour

- on capte un signal analogique continu
- *on le discrétise en temps (échantillonnage)*
- ~~on discrétise ses valeurs (quantification)~~
- ~~on code les valeurs discrètes en séries de bits d'information (codage)~~

Dans la suite, on considère donc des signaux continus, sauf dans la dernière partie

Plan

① Introduction

② Généralités

Différents types de signaux

Espaces Fonctionnels

Transformations des signaux

Produit de Convolution

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Espaces Fonctionnels

Ensemble des fonctions absolument intégrables

- Notation : $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$
- Définition : $x(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$
- Norme : $\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$
- Exemple : $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Espaces Fonctionnels

Ensemble des fonctions bornées

- Notation : $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$
- Définition : $x(t) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty$
- Norme : $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$
- Exemple : $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Espaces Fonctionnels

Ensemble des fonctions de carrés intégrables

- Notation : $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$
- Définition : $x(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$
- **Produit scalaire** : $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$
- Norme : $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$
- Exemple : $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple de signal de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=1}^{+\infty} \\ &= -0 - (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Espaces Fonctionnels

Cas particuliers des fonctions T_0 -périodiques

- Notation : $\mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right)$
- Définition : $x(t) \in \mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, x(t + T_0) = x(t) \\ \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty \end{cases}$
- **Produit scalaire** : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)y^*(t)dt$
- Norme : $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$
- Exemple : $x(t) = \cos \left(2\pi \frac{t}{T_0} \right)$

Exemple de signal de \mathcal{L}_2 ($[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}[$)

$$\begin{aligned}
 \|x\|_2^2 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left| \cos \left(2\pi \frac{t}{T_0} \right) \right|^2 dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos^2 \left(2\pi \frac{t}{T_0} \right) dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2 \times 2\pi \frac{t}{T_0} \right) \right] dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} dt + \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos \left(4\pi \frac{t}{T_0} \right) dt \right)
 \end{aligned}$$

Exemple de signal de $\mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right)$

$$\begin{aligned}
 \|x\|_2^2 &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{2} [t]_{t=-T_0/2}^{+T_0/2} + \left[\frac{T_0}{4\pi} \sin \left(4\pi \frac{t}{T_0} \right) \right]_{t=-T_0/2}^{+T_0/2} \right) \\
 &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{1}{2} \left[\frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2} \right) \right] + \frac{T_0}{4\pi} \left[\sin \left(4\pi \frac{T_0}{2T_0} \right) - \sin \left(-4\pi \frac{T_0}{2T_0} \right) \right] \right) \\
 &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{4\pi} [\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)] \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Plan

① Introduction

② Généralités

Différents types de signaux

Espaces Fonctionnels

Transformations des signaux

Produit de Convolution

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Décalage temporel

Décalage temporel de $x(t)$

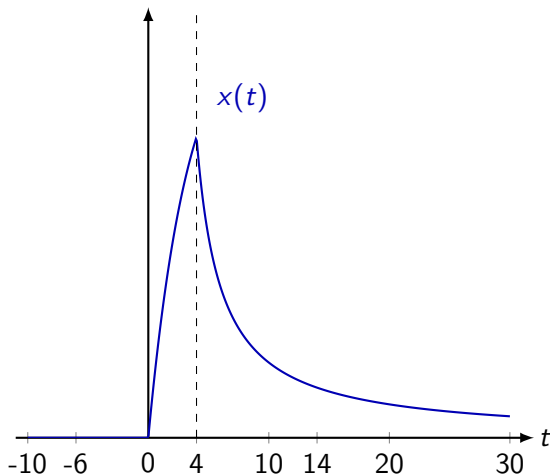
Une version décalée de $x(t)$ avec un retard τ est donnée par

$$y(t) = x(t - \tau)$$

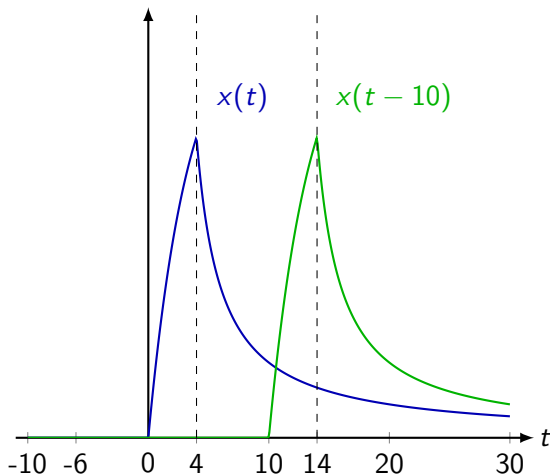
- si $\tau > 0$, $y(t)$ est une version retardée de $x(t)$ de τ secondes
- si $\tau < 0$, $y(t)$ est une version avancée de $x(t)$ de $-\tau$ secondes

Le décalage préserve la forme du signal et revient à déplacer la courbe vers la droite pour $\tau > 0$ et vers la gauche pour $\tau < 0$ (se rappeler *quand est-ce que l'argument vaut une valeur fixe ?*)

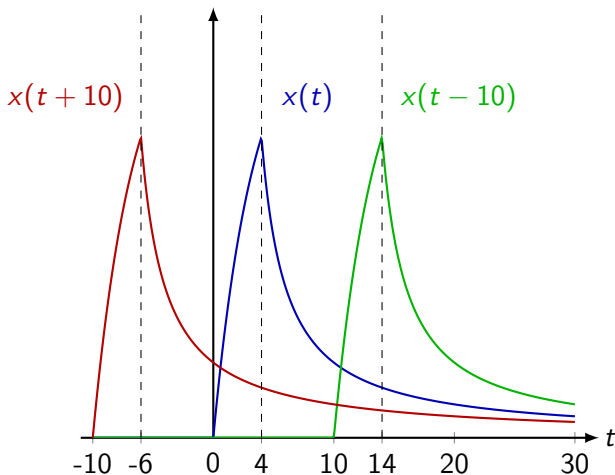
Décalage temporel



Décalage temporel



Décalage temporel



Renversement du temps

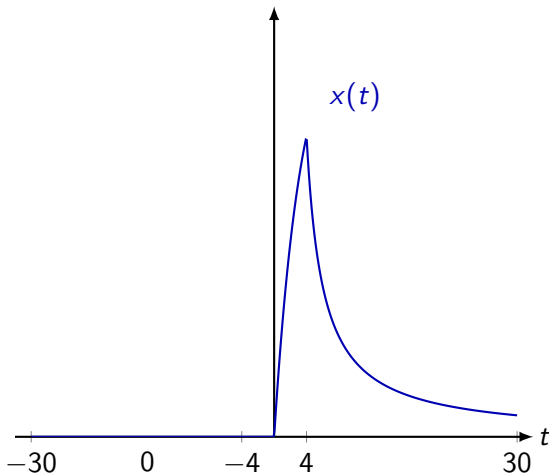
Renversement du temps $x(t)$

Le renversement en temps de $x(t)$ est donné par

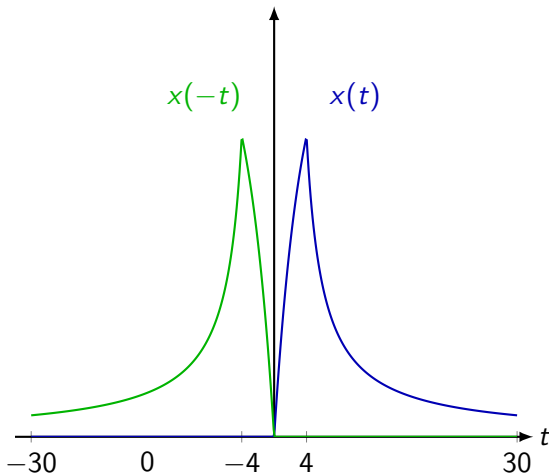
$$y(t) = x(-t)$$

- c'est le symétrique de $x(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées

Renversement du temps



Renversement du temps



Mise à l'échelle en temps

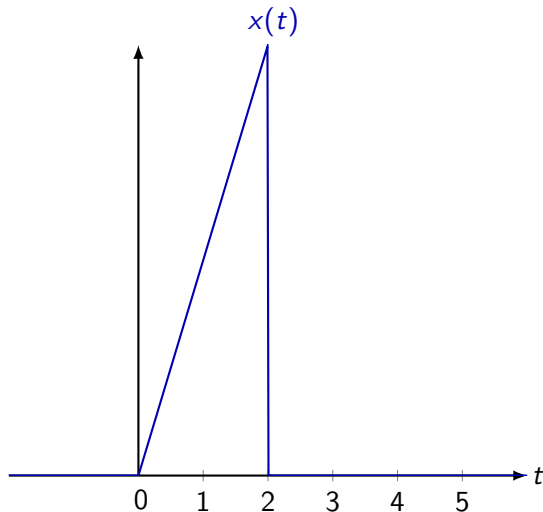
Mise à l'échelle en temps de $x(t)$

Une version mise à l'échelle en temps de $x(t)$ avec un facteur d'échelle $a \neq 0$ est donnée par

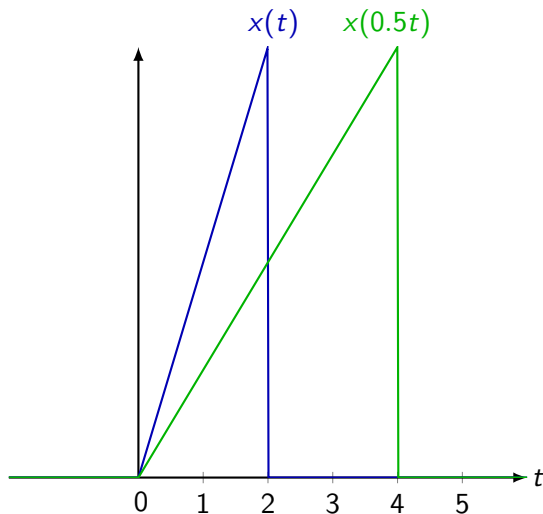
$$y(t) = x(at)$$

- si $|a| > 1$, on réalise une compression du signal
- si $|a| < 1$, on réalise une dilatation du signal
- si $a < 0$, on réalise également un renversement en temps

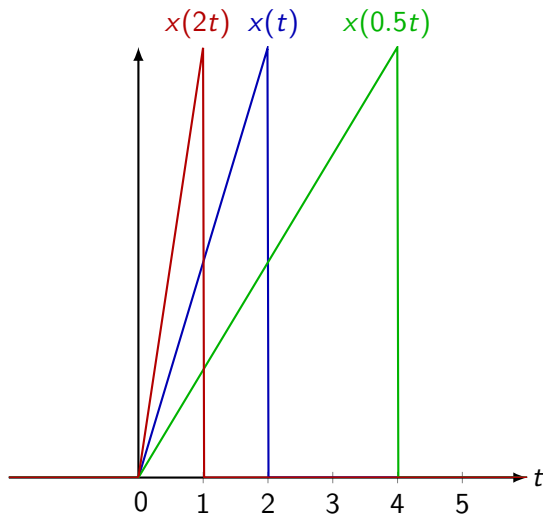
Mise à l'échelle en temps



Mise à l'échelle en temps



Mise à l'échelle en temps



Combinaison de transformations

Combinaison de transformations

Une combinaison de ces transformations sur un signal $x(t)$ s'écrit

$$y(t) = x(at - b) = x\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right) = x(a(t - \tau))$$

où $\tau = b/a$

On reconnaît

- τ comme un décalage temporel
- a comme un facteur d'échelle temporel
- le signe de a indique s'il y a un retournement temporel

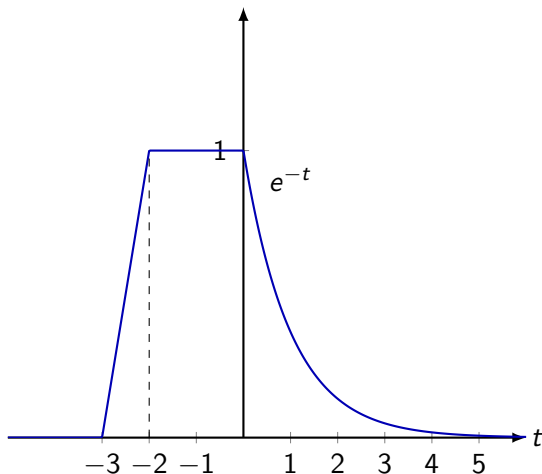
Combinaison de transformations

En pratique

- 1 application du facteur d'échelle : $z(t) = x(at)$
 - si $|a| < 1$ le signal est dilaté
 - si $|a| > 1$ le signal est comprimé
 - si $a < 0$ le signal est retournée dans le temps
- 2 application du décalage temporel : $z(t - \tau) = x(a(t - \tau)) = y(t)$
 - si $\tau > 0$ le signal est décalé vers la droite
 - si $\tau < 0$ le signal est décalé vers la gauche

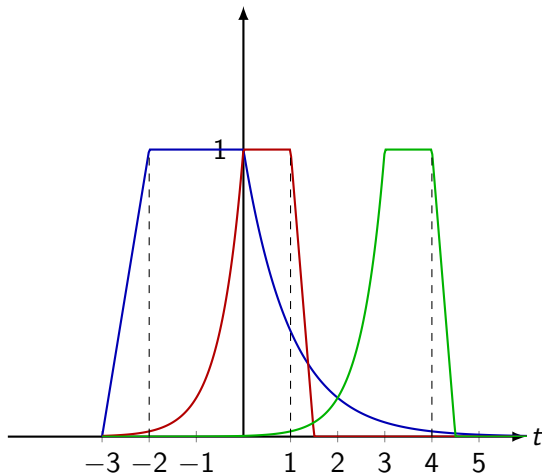
Exercice

Dessiner le graphe de $y(t) = x(-2t + 6)$



Exercice

$$y(t) = x(-2t + 6) = x(-2(t - 3))$$



Plan

① Introduction

② Généralités

Différents types de signaux

Espaces Fonctionnels

Transformations des signaux

Produit de Convolution

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Définitions

Pour deux fonctions $x(t), y(t)$ de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$(x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt.$$

- $y(\tau - t) = y(-(t - \tau)) \rightarrow$ retournement puis décalage temporel

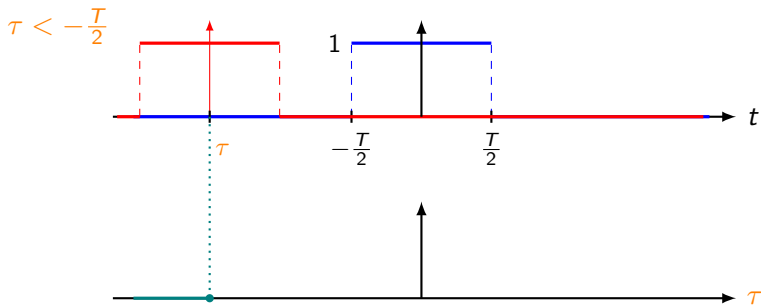
Pour deux fonctions $x(t), h(t)$ de $\mathcal{L}_2\left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]\right)$

$$(x * h)(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)h(\tau - t)dt.$$

Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

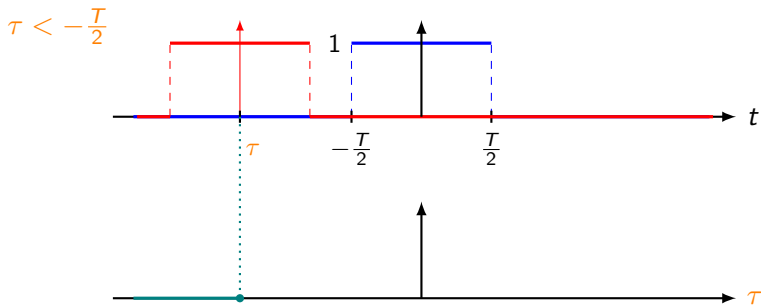
$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$



Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

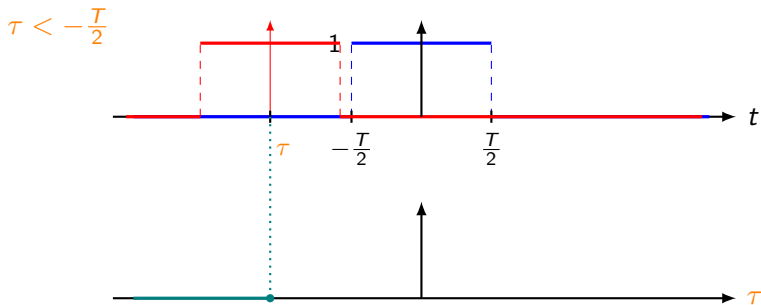
$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$



Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

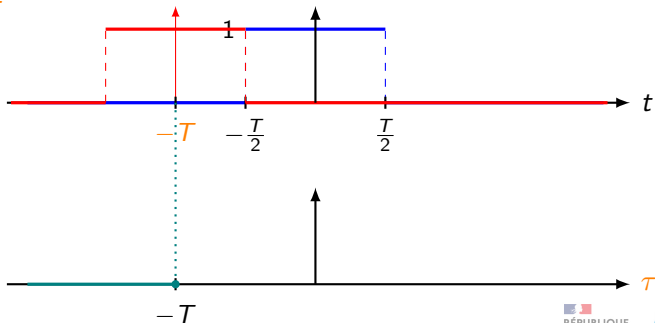


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$\tau = -T$$

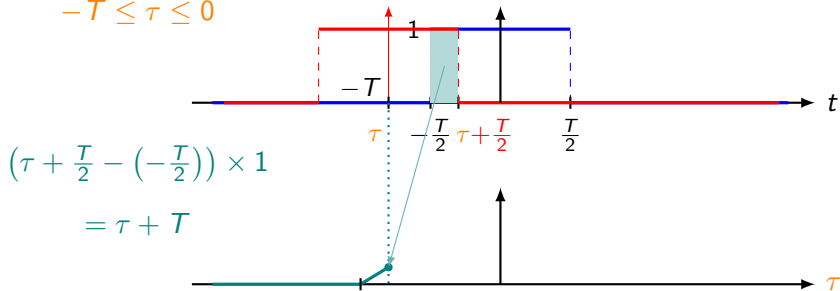


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$-T \leq \tau \leq 0$$

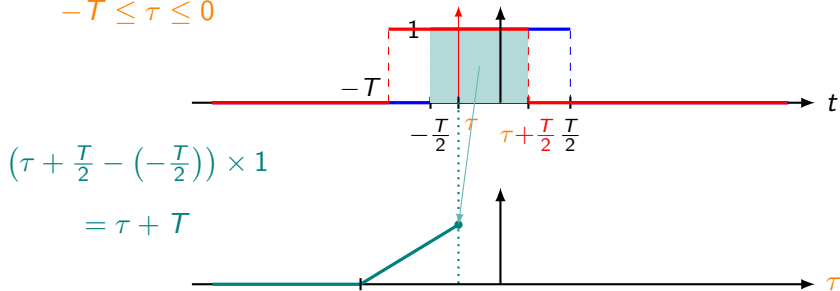


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

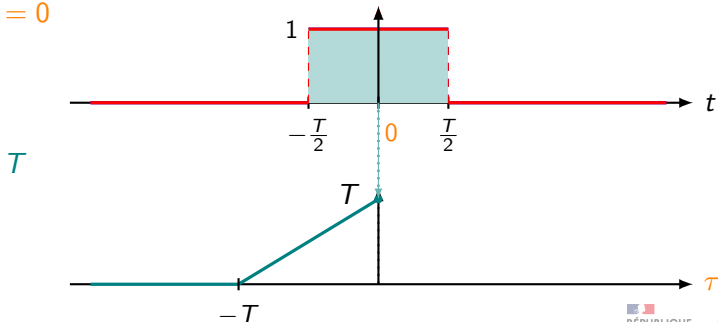
$$-T \leq \tau \leq 0$$



Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

 $\tau = 0$ 

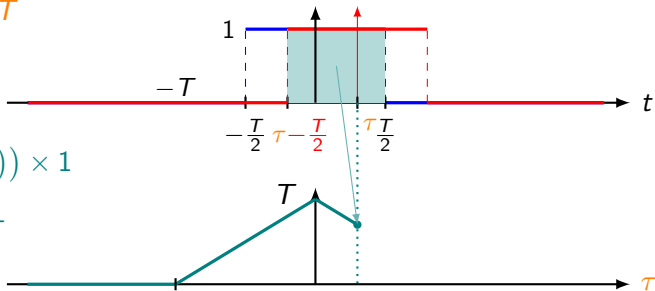
Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$0 \leq \tau \leq T$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T}{2} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right)\right) \times 1 \\ & = T - \tau \end{aligned}$$



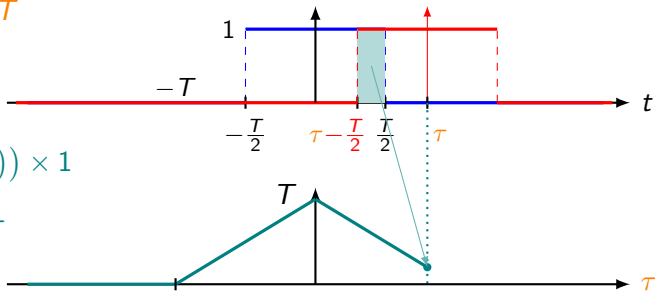
Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$0 \leq \tau \leq T$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T}{2} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right)\right) \times 1 \\ & = T - \tau \end{aligned}$$

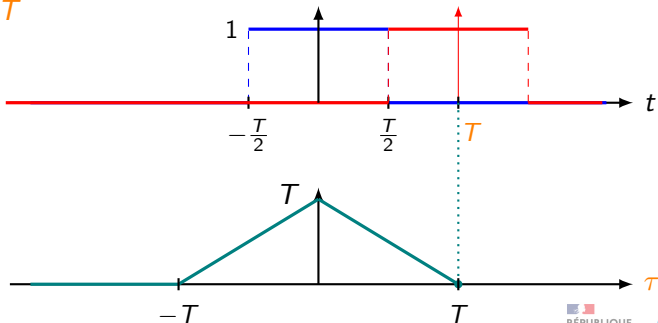


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$0 \leq \tau \leq T$$

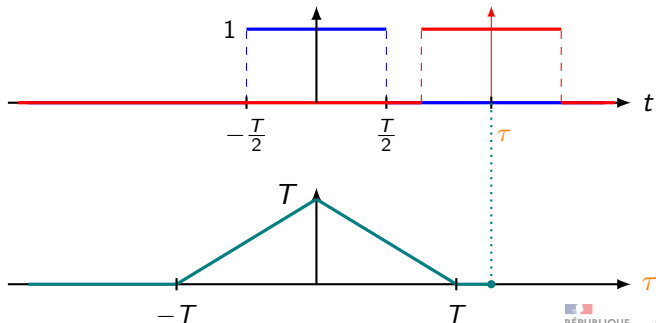


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$\tau > T$$

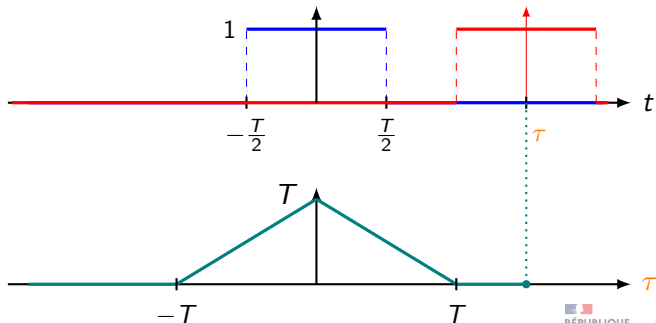


Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)dt$$

$$\tau > T$$



Exemple pour $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Pour } x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } y(\tau) = (x * h)(\tau) = \begin{cases} T - |\tau| & \text{si } \tau \in [-T, +T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés de la convolution (1/2)

- commutativité

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- associativité

$$[g(t) * h(t)] * x(t) = g(t) * [h(t) * x(t)]$$

- distributivité

$$h(t) * [x_1(t) + x_2(t)] = h(t) * x_1(t) + h(t) * x_2(t)$$

- préserve la causalité

$$x(t) \text{ causal et } h(t) \text{ causal} \Rightarrow h(t) * x(t) \text{ causal}$$

Propriétés de la convolution (2/2)

- décalage temporel

$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow h(t - \tau_1) * x(t - \tau_2) = y(t - (\tau_1 + \tau_2))$$

En résumé

- un signal est une fonction qui varie en fonction d'une ou plusieurs variables
- un signal peut être **continu** ou **discret**, causal ou non-causal, **analogique** ou numérique, **périodique** ou **apériodique**, **déterministe** ou **aléatoire**
- on peut rassembler les signaux dans différentes “boîtes” appelées espaces fonctionnels
- on peut effectuer plusieurs opérations temporelles sur un signal : décalage, facteur d'échelle temporel, retournement, ou une combinaison de ces opérations
- la convolution est une opération sur deux signaux

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

Décomposition en série de Fourier

Transformée de Fourier

Fonctions Utiles

Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

Décomposition en série de Fourier

Transformée de Fourier

Fonctions Utiles

Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

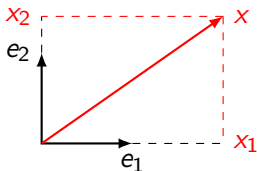
Rappel : base orthonormée

$\{e_k\}$ est une base orthonormée de \mathcal{E}

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathcal{E}$

$$x = \sum_k x_k e_k \text{ avec } x_k = \langle x, e_k \rangle$$



$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

Décomposition en série de Fourier

Base pour les fonctions périodiques

$\left\{ t \mapsto e^{j2\pi k \frac{t}{T_0}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $\mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right)$

$$\left\langle e^{j2\pi k \frac{t}{T_0}}, e^{j2\pi l \frac{t}{T_0}} \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{j2\pi(k-l) \frac{t}{T_0}} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right)$ et $f_0 = \frac{1}{T_0}$ (fondamentale)

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \text{ avec } c_k = \left\langle x, e^{j2\pi k f_0 t} \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Cas particulier : signal réel

Si $x(t) \in \mathbb{R}$

$$x^*(t) = x(t)$$

donne

$$c_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = c_k^*$$

et

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} + c_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + c_{-k}) \cos(2\pi k f_0 t) + j(c_k - c_{-k}) \sin(2\pi k f_0 t) \end{aligned}$$

Cas particulier : signal réel

On définit

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2\text{Re}(c_k) = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2k\pi f_0 t) dt$$

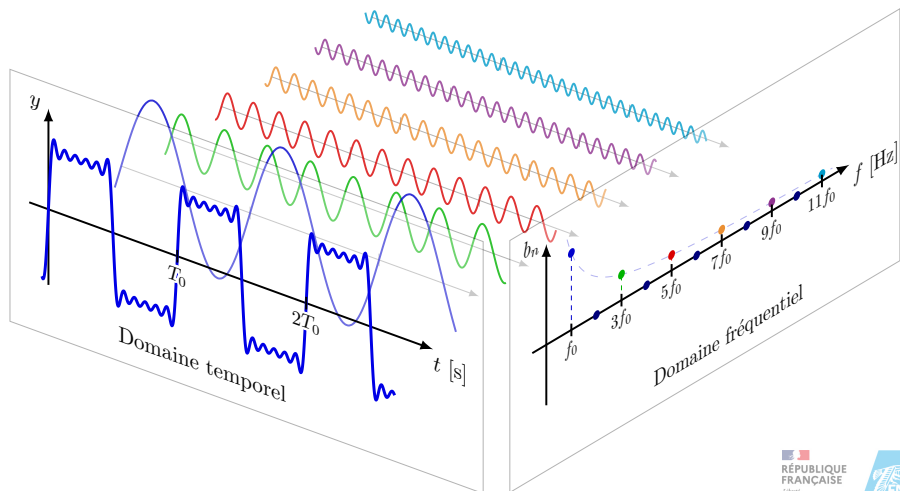
$$b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2\text{Im}(c_k) = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2k\pi f_0 t) dt$$

qui donne

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\pi f_0 t) + b_k \sin(2k\pi f_0 t)$$

Pour un signal réel !

Illustration



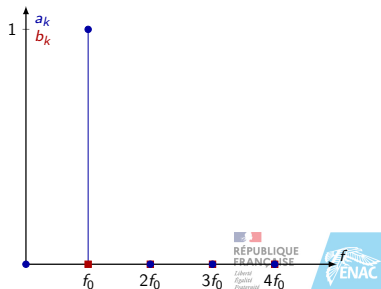
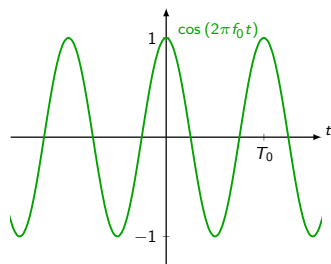
Utilisation

Dualité temps-fréquence

Définition

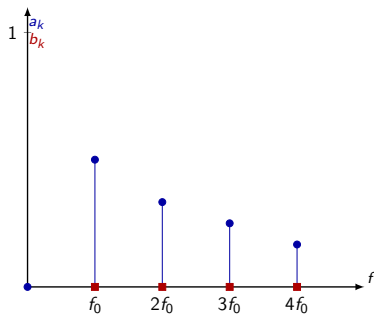
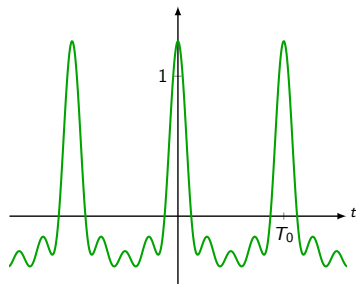
Les fréquences multiples de la fondamentale f_0 sont appelées harmoniques

Décomposition en série de Fourier : importance de chaque harmonique



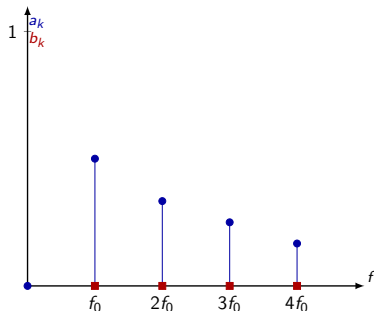
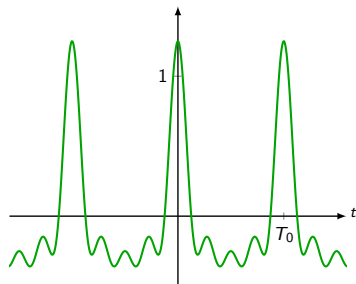
Utilisation

Exemple



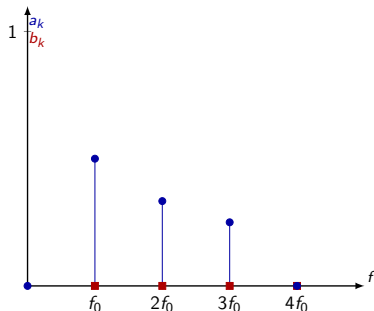
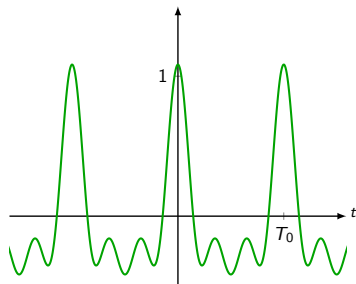
Utilisation

Exemple : filtrage passe-bas



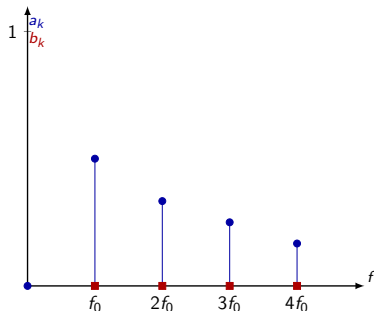
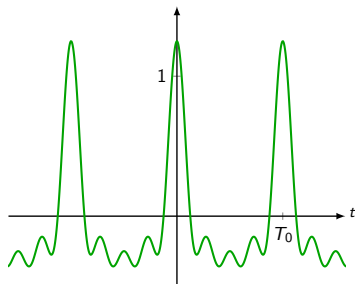
Utilisation

Exemple : filtrage passe-bas



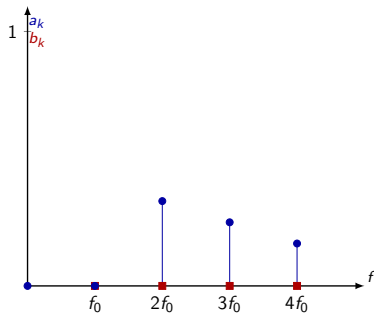
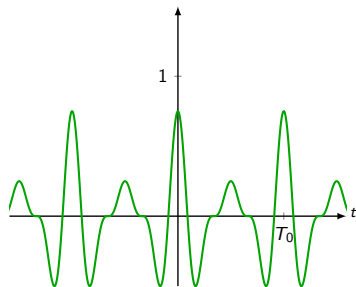
Utilisation

Exemple : filtrage passe-haut



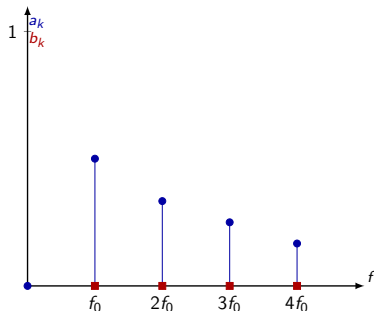
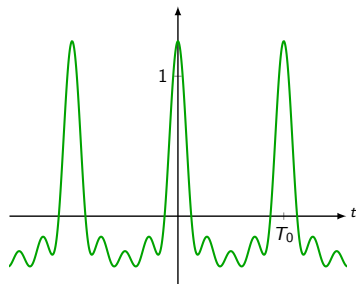
Utilisation

Exemple : filtrage passe-haut



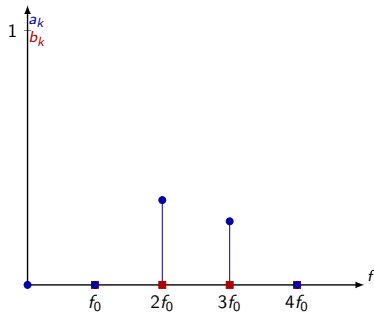
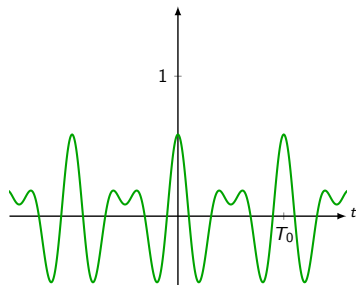
Utilisation

Exemple : filtrage passe-bande



Utilisation

Exemple : filtrage passe-bande



Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

Décomposition en série de Fourier

Transformée de Fourier

Fonctions Utiles

Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Généralisation : la transformée de Fourier

“Base” de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$? \rightarrow “période infinie”

$$\left\{ t \mapsto e^{j2\pi kf_0 t} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \left\{ t \mapsto e^{j2\pi ft} \right\}_{f \in \mathbb{R}}$$

Soit $x \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$c_k = \left\langle x, e^{j2\pi kf_0 t} \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt$$

$$\rightarrow \mathcal{F}\{x\}(f) = X(f) = \left\langle x, e^{j2\pi ft} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Généralisation : la transformée de Fourier inverse

Reconstruction du signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$\rightarrow x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{x(t)\}(f)](t) = x(t)$$

Signal périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{j2\pi(kf_0 - f)t} dt = \begin{cases} c_k & \text{si } f = kf_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conditions suffisantes d'existence

- **signal à énergie finie** : $x(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$
- **conditions de Dirichlet** :
 - 1 $x(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$
 - 2 $x(t)$ a un nombre fini de maxima et de minima dans n'importe quel intervalle fini
 - 3 $x(t)$ a un nombre fini de discontinuités, chacune de ces discontinuités étant finie

Admis dans la suite du cours

Propriétés de la Transformée de Fourier (1/3)

- linéarité

$$\mathcal{F}\{ax(t) + y(t)\}(f) = a\mathcal{F}\{x(t)\}(f) + \mathcal{F}\{y(t)\}(f), \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

- parité

si $x(t)$ est réelle et paire, alors $X(f)$ est réelle et paire

- translation

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\}(f) = e^{-j2\pi ft_0} X(f), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Propriétés de la Transformée de Fourier (2/3)

- modulation

$$\mathcal{F} \left\{ x(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} (f) = X(f - f_0), \quad \forall f_0 \in \mathbb{R}$$

- contraction de domaine

$$\mathcal{F} \{ x(at) \} (f) = \frac{1}{|a|} X \left(\frac{f}{a} \right), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- produit de convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ x(t) * y(t) \} (f) &= X(f) Y(f) \\ \mathcal{F} \{ x(t) y(t) \} (f) &= X(f) * Y(f) \end{aligned}$$

Propriétés de la Transformée de Fourier (3/3)

- égalité de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)^* df$$

en particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- conjugaison

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\}(f) = X^*(-f).$$

Plan

① Introduction

② Généralités

③ **Signaux Déterministes**

Décomposition en série de Fourier

Transformée de Fourier

Fonctions Utiles

Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Les distributions

Application linéaire

Pour deux \mathbb{C} -espaces vectoriels E, F

$$\{\phi : E \rightarrow F, \quad \forall (x, y) \in E \times E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)\}$$

Espace dual

Pour un espace vectoriel E ,

$$E^* = \{\text{applications linéaires de } E \text{ dans } \mathbb{R}\}$$

Cas des fonctions C^∞ et distribution de Dirac

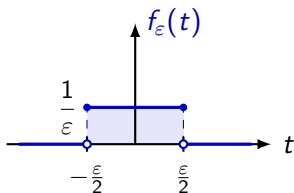
- Dual : espace des distributions
- En particulier distribution de Dirac $\delta : f \in C^\infty \rightarrow f(0)$
- Notation : $\langle \delta, f \rangle = f(0)$
- Lien avec le produit scalaire : fonctions “généralisées”

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

- Application à $f(t) = 1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
- Application à $f(t) = e^{j2\pi ft}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1$

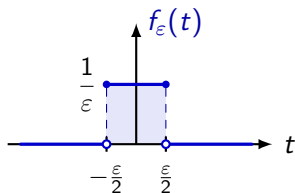
Approche simplifiée

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



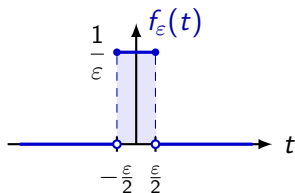
Approche simplifiée

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



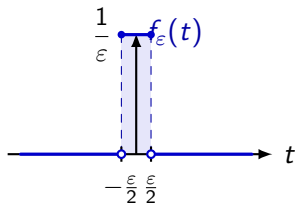
Approche simplifiée

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



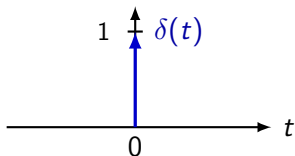
Approche simplifiée

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Approche simplifiée

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Propriétés de l'impulsion de Dirac (1/2)

- localisation

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- convolution

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- décalage

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Propriétés de l'impulsion de Dirac (2/2)

- transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(f) = 1$$

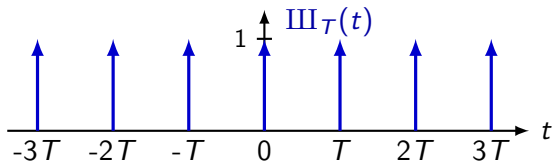
- conséquences

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}(f) = \exp(-j2\pi ft_0)$$

$$\mathcal{F}\{\exp(j2\pi f_0 t)\}(f) = \delta(f - f_0)$$

Peigne de Dirac

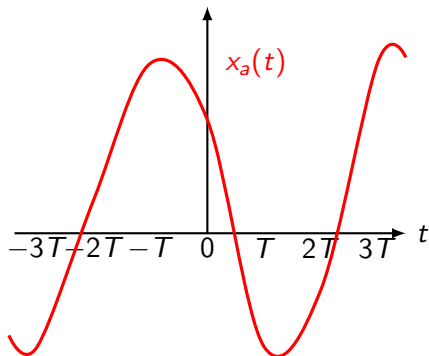
$$\text{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



$$\mathcal{F}\{\text{III}_T(t)\}(f) = \frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$$

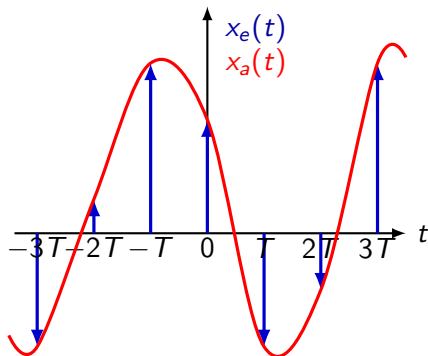
Application : échantillonnage

$$x_e(t) = x_a(t)\text{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT)\delta(t - kT)$$



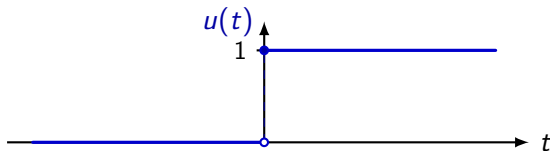
Application : échantillonnage

$$x_e(t) = x_a(t)\text{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT)\delta(t - kT)$$



Échelon unité

$$u(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

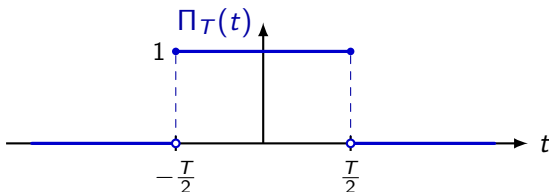


Propriété

$$\mathbb{1}_{[t_0, t_1[}(t) = u(t - t_0) - u(t - t_1)$$

Fonction porte

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

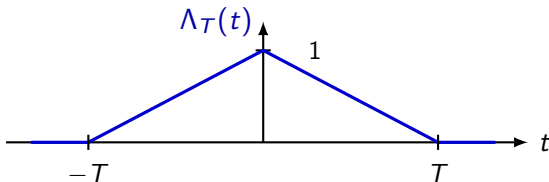


Propriété

$$\mathcal{F}\{\Pi_T(t)\}(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

Fonction triangle

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Propriétés

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\Lambda_T(t)$$

$$\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\} = T \operatorname{sinc}^2(\pi fT)$$

Calcul de la transformée de Fourier de Λ_T

On a montré

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\Lambda_T(t) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{\Pi_T(t) * \Pi_T(t)\}(f) = \mathcal{F}\{T\Lambda_T(t)\}(f)$$

Par propriétés de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Pi_T(t) * \Pi_T(t)\}(f) &= \mathcal{F}\{\Pi_T(t)\}(f) \times \mathcal{F}\{\Pi_T(t)\}(f) \\ &= \mathcal{F}\{\Pi_T(t)\}(f)^2 \\ \mathcal{F}\{T\Lambda_T(t)\}(f) &= T\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\}(f) \end{aligned}$$

Or

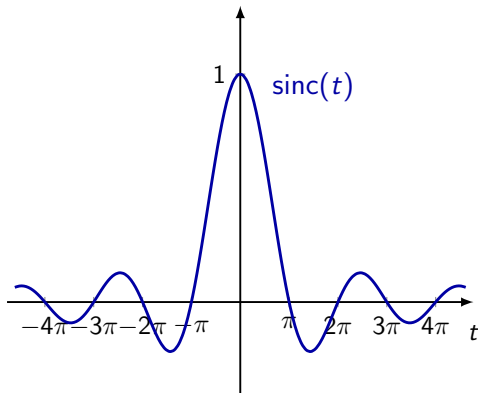
$$\mathcal{F}\{\Pi_T(t)\}(f) = T \operatorname{sinc}(\pi fT)$$

Donc

$$[T \operatorname{sinc}(\pi fT)]^2 = T\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\}(f) \Rightarrow \mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\} = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$$

Sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$



Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

Décomposition en série de Fourier

Transformée de Fourier

Fonctions Utiles

Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Signaux déterministes

Contexte

- signaux à temps continu ($t \in \mathbb{R}$)
- une seule réalisation statistique possible
 - dé à 6 faces allant de 1 à 6 : aléatoire
 - dé à 6 faces avec seulement des 1 : déterministe

Signaux déterministes non-périodiques

Pour un signal $x(t)$ non-périodique

- **puissance instantanée** : $p(t) = |x(t)|^2$
- **puissance moyenne sur l'intervalle** $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$: $P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$
- **puissance moyenne** : $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$
- **énergie dans l'intervalle** $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$: $E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$
- **énergie totale** : $E = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

Signaux déterministes périodiques

Pour un signal $x(t)$ de période T

- sa **puissance moyenne** : $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

Classification des signaux déterministes

- Signaux déterministes à énergie finie

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \Leftrightarrow x(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$$

- Signaux déterministes périodiques à puissance finie

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \mathcal{L}_2 \left(\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2} \right] \right)$$

- Signaux déterministes non-périodiques à puissance finie

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Exemples

Pour la fonction triangle $\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Lambda_T(t)|^2 dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \Lambda_T(t)^2 dt \\ &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \\ &= 2 \left[-\frac{T}{3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3 \right]_0^T \\ &= \frac{2T}{3} < \infty \end{aligned}$$

Exemples

Pour la fonction triangle $\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} P_{T_1} &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{+T_1/2} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{2T}{3T_1} \\ &\xrightarrow{T_1 \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc $P = 0$

Exemples

Pour la fonction échelon unité $u(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^{+\infty} dt$$

$$= \infty$$

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |u(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{+T/2} dt$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc $P = \frac{1}{2}$

Exemples

Pour la fonction cosinus $\cos(t)$ (2π -périodique)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\cos(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\pi}^{+\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi} (\pi - (-\pi)) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $P = \frac{1}{2}$

Corrélations et densités spectrales

Signaux à énergies finies : corrélations

- autocorrélation

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

- intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Corrélations et densités spectrales

Signaux à énergies finies : densités spectrales

- densité spectrale d'énergie

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- densité interspectrale d'énergie

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F} \{R_{xy}(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Corrélations et densités spectrales

Signaux périodiques à puissances finies : corrélations

- autocorrélation

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

- intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Corrélations et densités spectrales

Signaux périodiques à puissance finies : densités spectrales

- densité spectrale de puissance

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- densité interspectrale de puissance

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F} \{R_{xy}(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Corrélations et densités spectrales

On introduit $\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t)dt$

Signaux à puissance finies : corrélations

- autocorrélation

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

- intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Corrélations et densités spectrales

Signaux à puissances finies : densités spectrales

- densité spectrale de **puissance**

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- densité interspectrale **puissance**

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F} \{R_{xy}(\tau)\} (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Exemples

Pour $x(t) = A$

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A dt = A$$

Autocorrélation

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} A^2 \\ &= A^2 \end{aligned}$$

Exemples

Pour $x(t) = A$

Densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} (f) \\ &= \mathcal{F} \{A^2\} (f) \\ &= A^2 \mathcal{F} \{1\} (f) \\ &= A^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Exemples

Pour $x(t) = e^{j2\pi f_1 t}$, période $T_1 = \frac{1}{f_1}$

$$P = f_1 \int_{-\frac{1}{2f_1}}^{\frac{1}{2f_1}} |e^{j2\pi f_1 t}|^2 dt = 1$$

Autocorrélation

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= f_1 \int_{-\frac{1}{2f_1}}^{\frac{1}{2f_1}} x(t)x^*(t-\tau) dt \\ &= f_1 \int_{-\frac{1}{2f_1}}^{\frac{1}{2f_1}} e^{j2\pi f_1 t} e^{-j2\pi f_1 (t-\tau)} dt \\ &= f_1 e^{j2\pi f_1 \tau} \int_{-\frac{1}{2f_1}}^{\frac{1}{2f_1}} e^{j2\pi (f_1 - f_1)t} dt \\ &= e^{j2\pi f_1 \tau} \end{aligned}$$

Exemples

Pour $x(t) = e^{j2\pi f_1 t}$

Densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \mathcal{F} \{R_x(\tau)\} (f) \\ &= \delta(f - f_1) \end{aligned}$$

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

Introduction

Bases de Probabilités

Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

Introduction

Bases de Probabilités

Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Définitions

Fonctions à temps continu : $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{x | \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{C}\}$

- la fonction $t \mapsto \exp(t)$
- l'intensité d'une ampoule

Événement déterministe : une seule réalisation statistique

- la fonction $t \mapsto \cos(t)$

Événement aléatoire : plusieurs réalisations possibles avec différentes probabilités

- lancé de dé
- mesure d'une température à l'aide d'un capteur

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

Introduction

Bases de Probabilités

Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Variables aléatoires

Définition

Variable **réelle** dont la valeur est déterminée après la réalisation d'un phénomène **aléatoire** dont la fréquence d'apparition dépend d'une probabilité

Exemples

- lancé d'une pièce non truquée
- lancé d'un dé truqué

Variables aléatoires

Définition

Il existe deux principaux types de variables aléatoires

- variables aléatoires discrètes : l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est dénombrable (ex : $\{0, \frac{\pi}{2}\}, \mathbb{N}, \dots$)
- variables aléatoires continues : l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est indénombrable (ex : $[0, 1], \mathbb{R}, \dots$)

Variables aléatoires

Caractérisation

Classiquement on utilise

- pour tout type de variable aléatoire : fonction de répartition (CDF)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- variables aléatoires discrètes : fonction de masse (PMF)

$$P_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- variables aléatoires continues : fonction densité de probabilité (PDF)

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

Fonction de masse

X VA discrète qui prend ses valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}$ dénombrable

Propriétés

- $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- $\sum_{x \in \Omega} P_X(x) = 1$
- $\forall A \subset \Omega, P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$

Exemple : loi uniforme discrète

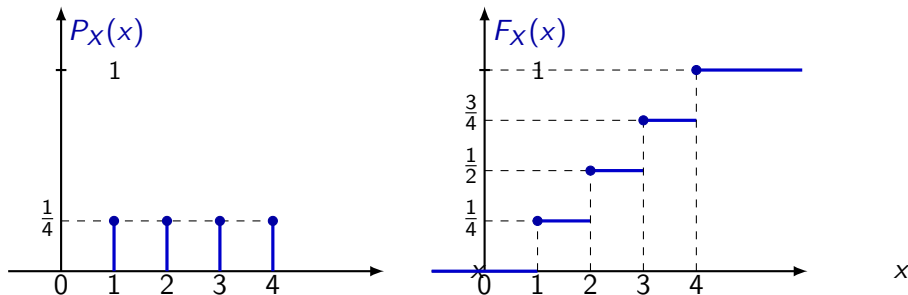
Pour une VA uniforme discrète sur $\{1, \dots, N\}$, on veut que chaque élément ait la même probabilité (pas d'élément privilégié)

$$P_X(x) = \begin{cases} p \in [0, 1] & \text{si } x \in \Omega = \{1, \dots, N\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} P_X(x) = 1 &\Rightarrow \sum_{x=1}^N P_X(x) = 1 \\ &\Rightarrow \sum_{x=1}^N p = 1 \\ &\Rightarrow Np = 1 \\ &\Rightarrow p = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Exemple

Loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$



Pour une VA discrète, F_X est discontinue

Variables aléatoires continues : attention

Pour une VA continue X

$$\mathbb{P}(X = x) = 0$$

En revanche, $\mathbb{P}(X \in [a, b])$ peut être non-nul et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f_X(x) dx\end{aligned}$$

Les zones à forte densité sont plus probables

Conséquence :

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b])$$

Densité de probabilité

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) du = 1$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u) du$

Exemple : loi uniforme continue

Pour une VA uniforme continue sur $[a, b]$, on veut que chaque sous intervalle de $[a, b]$ ait la même probabilité (pas de zone privilégiée) La densité de probabilité est constante

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_a^b f_X(x) dx = 1$$

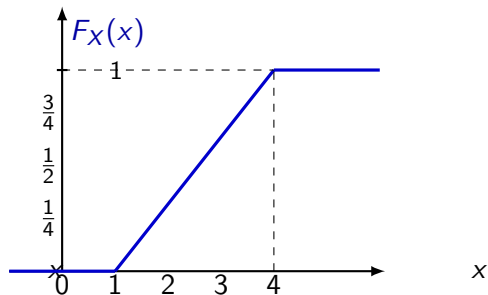
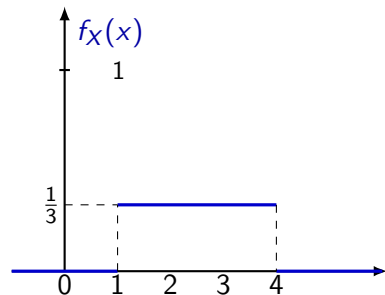
$$\Rightarrow \int_a^b \alpha dx = 1$$

$$\Rightarrow (b - a)\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{b - a}$$

Exemple

Loi uniforme sur $[1, 4]$



Pour une VA continue, F_X est continue

Espérance

Moyenne statistique d'une variable aléatoire

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est donnée par

- si X VA discrète

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \Omega} x P_X(x) = \sum_{k \in \Omega} x \mathbb{P}(X = x)$$

- si X VA continue

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

“somme” ↔ “intégrale” et “PMF” ↔ “PDF”

Exemple

- loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \Omega} x P_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^N \frac{x}{N} \\ &= \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{N+1}{2}\end{aligned}$$

Espérance

Théorème

L'espérance est linéaire

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

Pour des VA X_1, \dots, X_n

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n]$$

Exemple : on lance un dé et on regarde le double du résultat auquel on ajoute 3. Quelle est l'espérance de cette variable aléatoire ? On lance deux dés, quelle est l'espérance de la somme ?

Fonction d'une variable aléatoire

Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire

- si X est une VA discrète

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \Omega} g(x)P_X(x)$$

- si X est une VA continue

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx$$

Exemple : X uniforme sur $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$. Calculer $\mathbb{E}[\sin(X)]$

Variance

Dispersion autour de la moyenne

Définition

La variance d'une variable aléatoire X est donnée par

$$\text{Var}(x) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Propriété

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Exemple : variance de la loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$

Variables aléatoires indépendantes

Définition

Deux VA X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}[X \in x \text{ et } Y \in y] = \mathbb{P}[X \in x]\mathbb{P}[Y \in y]$$

Propriétés

Si deux VA X et Y sont indépendantes, alors pour toutes les fonctions f et g on a

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$

Exemple : variance d'une somme de VA indépendantes

Produit scalaire sur les VA

Définition

On peut définir un produit scalaire pour deux variables aléatoires par

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY^*]$$

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

Introduction

Bases de Probabilités

Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Signaux aléatoires

Définition

Un signal $x(t)$ est un signal aléatoire si à t fixé $x(t)$ est une variable aléatoire

Exemple : capteur qui fournit une température avec une erreur de mesure (aléatoire)

$$x(t) = \theta(t) + e(t)$$

Autocorrélation et intercorrélation

Définition (autocorrélation)

Soient $x(t)$ un signal aléatoire. On définit son autocorrélation par

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad R_x(t_2, t_1) = \langle x(t_2), x(t_1) \rangle = \mathbb{E}[x(t_2)x^*(t_1)]$$

Définition (intercorrélation)

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux aléatoires. On définit leur intercorrélation par

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad R_{xy}(t_2, t_1) = \langle x(t_2), y(t_1) \rangle = \mathbb{E}[x(t_2)y^*(t_1)]$$

Attention : ce sont des fonctions de deux variables !

Signaux aléatoires à puissance moyenne finie

Définition

Soit $x(t)$ un signal aléatoire à temps continu. On dit que $x(t)$ est un signal aléatoire à puissance moyenne finie s'il vérifie

$$P_x(t) = \mathbb{E}[|x(t)|^2] < \infty$$

Note : $\mathbb{E}[|x(t)|^2] = \mathbb{E}[x(t)x^*(t)] = \langle x(t), x(t) \rangle$

Signaux aléatoires stationnaires

Invariance des propriétés statistiques par translation dans le temps

Stationnarité au sens large

Un signal $x(t)$ est stationnaire au sens large s'il vérifie

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[x(t)] &= m_x \\ \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}[x(t_2)x^*(t_1)] &= R_x(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Remarque : $\forall (t, \tau) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E}[x(t)x^*(t - \tau)] = R_x(\tau) \rightarrow$ une seule variable donc possibilité de définir la TdF

Il est impératif de vérifier ces deux conditions pour appliquer les résultats qui suivent !

Exemple : le bruit blanc

Possibilité de définir un signal stationnaire par son autocorrélation. On définit un bruit blanc $n(t)$ avec

$$\mathbb{E}[n(t)] = 0$$

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

donc

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

Analogie avec lumière blanche

Signaux aléatoires stationnaires à puissance moyenne finie

Lien avec les signaux déterministes

Pour un signal $x(t)$ stationnaire à puissance moyenne finie

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x^*(t - \tau)] = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

Densité spectrale de puissance

Pour un signal $x(t)$ stationnaire à puissance moyenne finie

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Signaux aléatoires stationnaires

Propriétés

Pour un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire

- puissance

$$P_x(t) = P_x = R_x(0)$$

- borne supérieure

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = P_x$$

- symétrie Hermitienne

$$R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$$

Signaux aléatoires stationnaires

Propriétés

Pour un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire

- parité pour un signal réel

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- caractère réel

$$S_x(f) \in \mathbb{R}$$

- parité

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow S_x(f) = S_x(-f)$$

Signaux aléatoires stationnaires

Propriétés

Pour un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire

- positivité

$$S_x(f) \geq 0$$

- intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = P_x$$

Toutes ces propriétés se généralisent aux signaux déterministes !
(attention énergie/puissance)

Bilan

| Classe | Conditions | Produit Scalaire |
|-------------------------------------|---|---|
| Énergie finie | $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt < \infty$ | $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt$ |
| Périodique à puissance finie | $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) ^2 dt < \infty$ | $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$ |
| Puissance finie | $P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt < \infty$ | $\langle x, y \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t)dt$ |
| Aléatoire à puissance moyenne finie | $P_x(t) = \mathbb{E} [x(t) ^2] < \infty$ | $\langle x, y \rangle = \mathbb{E} [x(t)y^*(t)]$ |

$$R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}(f)$$

Penser à vérifier la stationnarité si aléatoire

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Introduction

Signaux numériques

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Introduction

Signaux numériques

Motivation

Filtrage

- opération sur un signal d'entrée (amplification, retrait de certaines fréquences, ...)
- possibilité de travailler sur signal numérisé : filtrage numérique

Avantages :

- programmables
- pas de dérive en temps ni température
- filtre "idéaux" (comparés à des composants)

Outil nécessaire pour l'analyse des signaux numériques

- on n'a plus de fonctions continues : suites numériques

Plan

① Introduction

② Généralités

③ Signaux Déterministes

④ Signaux Aléatoires

⑤ Signaux discrets

Introduction

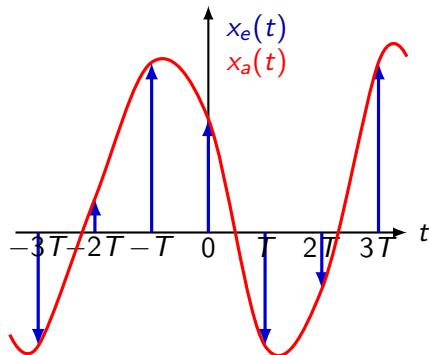
Signaux numériques

Définition : échantillonnage

On regarde la valeur d'un signal $x(t)$ à des instants très précis t_1, t_2, \dots

$$x[n] = x(t_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : en général, $t_n = nT_e$, avec T_e période d'échantillonnage



Signaux déterministes non-périodiques

Grandeurs utiles

- sa **puissance instantanée** : $p_n = |x[n]|^2$
- **puissance moyenne sur l'intervalle** $\{-N, \dots, N\}$:

$$P_{2N+1} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$
- **puissance moyenne** : $P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$
- **énergie dans l'intervalle** $\{-N, \dots, N\}$: $E_{2N+1} = \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$
- **énergie totale** : $E = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$

→ signaux discrets non-périodiques à énergie finie et à puissance finie

Signaux déterministes non-périodiques : produits scalaires

Produit scalaire sur les signaux à énergie finie

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$$

Produit scalaire sur les signaux à puissance finie

$$\langle x, y \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]y^*[n]$$

→ extension des notions définies pour les signaux continus (corrélations, convolution, ...)

Signaux déterministes périodiques

Définition : signaux N -périodiques (fréquence $1/N$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x[n + N] = x[n]$$

Puissance moyenne

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n].$$

Produit de convolution

Abus de notation $(x * y)[n] = x[n] * y[n]$

Signaux discrets non-périodiques

$$(x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n - k].$$

Signaux N -périodiques

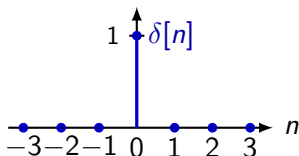
$$(x * y)[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n - k].$$

→ mêmes propriétés que celui défini pour les signaux continus

Impulsion de Dirac discrète (1/2)

Définition

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$



Impulsion de Dirac discrète (2/2)

Propriétés

- localisation

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$

- convolution

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- décalage

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0].$$

Transformée de Fourier discrète

Signaux N -périodiques : base $n \mapsto e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$, $k = 0, \dots, N - 1$

Transformée de Fourier discrète, ou DFT

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} = \left\langle x[n], e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \right\rangle, k = 0, \dots, N - 1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{2\pi jkn}{N}}$$

Transformée de Fourier à temps discret (1/2)

Signaux discrets : base $n \mapsto e^{2\pi j n \tilde{f}}$, $\tilde{f} \in [0, 1[$

Transformée de Fourier à temps discret, ou DTFT

$$X(\tilde{f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2\pi j n \tilde{f}} = \langle x[n], e^{2\pi j n \tilde{f}} \rangle, \tilde{f} \in [0, 1[$$

$$x[n] = \int_0^1 X(\tilde{f}) e^{2\pi j n \tilde{f}} d\tilde{f} = \langle X(\tilde{f}), e^{-j2\pi n \tilde{f}} \rangle, n \in \mathbb{Z}$$

Transformée de Fourier à temps discret (2/2)

Propriétés

- la DTFT est 1-périodique
- pour un signal discret N -périodique

$$X(\tilde{f}) = \begin{cases} Nc_k & \text{si } \tilde{f} = \frac{kn}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$